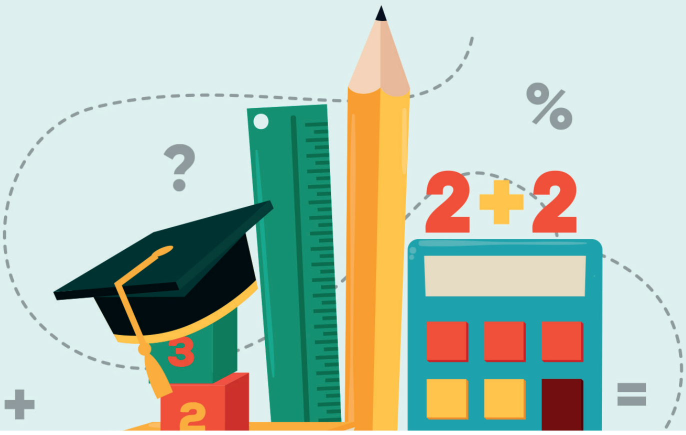
Institut National de Formation Pédagogique

Département de la Formation du Personnel Administratif

vous présentent



SEMINAIRE

SUR

L'ALGÈBRE INFORMATIQUE

Cibles : Formateurs et enseignants en Mathématiques de la classe de 6ème à la Terminale.

Intervenant : Dr RANDRIAMARO Hery

22 DEC **2020**

14h 30mn

INFP MAHAMASINA

Algèbre Informatique pour l'Enseignement Secondaire

Hery Randriamaro

`Séminaire tenu à l'Institut National de Formation Pédagogique`

Abstract

Ce séminaire souhaite initier les enseignants en mathématiques du cycle secondaire à l'algèbre informatique. Ils pourront ainsi préparer leurs cours, élaborer des exercices et présenter des solutions avec une meilleure précision, rapidité et clarté. Nous verrons comment effectuer des calculs vectoriels, déterminer des propriétés arithmétiques, résoudre des systèmes d'équations, étudier des fonctions et tracer des courbes avec le logiciel de calcul formel Maxima.

1 Calcul Vectoriel

On définit un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ par la commande

$$u : [a, b, c];$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$ se calcule par

$$u.v;$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs u, v se calcule par

$$\text{load(vect) \$ express}(u \sim v);$$

Considérons les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$ par exemple.

```
(%i1) u:[1,2,3]; v:[3,2,1];
(%o1)                                        [1, 2, 3]
(%o2)                                        [3, 2, 1]
(%i3) u.v;
(%o3)                                           10
(%i4) load(vect) $ express(u~v);
(%o4)                                      [- 4, 8, - 4]
```

2 Arithmétique

Considérons deux entiers positifs a, b. Pour afficher le quotient et le reste de la division de a par b, on tape

divide(a, b);

Pour déterminer juste le reste, on tape

mod(a, b);

L'ensemble des diviseurs positifs de a s'affiche par la commande

divisors(a);

La décomposition de a en facteurs premiers s'exécute par la commande

factor(a);

Le plus grand diviseur commun de a et b s'obtient par la commande

gcd(a, b);

Et le plus petit multiple commun de a et b s'obtient par la commande

load(functs) \$ lcm(a, b);

Considérons les entiers $a = 1234567$ et $b = 2357$ par exemple.

```
(%i1) a:1234567; b:2357;
(%o1)                                   1234567
(%o2)                                    2357
(%i3) divide(a,b);
(%o3)                                 [523, 1856]
(%i4) mod(a,b);
(%o4)                                    1856
(%i5) divisors(a);
(%o5)                          {1, 127, 9721, 1234567}
(%i6) factor(a);
(%o6)                                  127 9721
(%i7) gcd(a,b);
(%o7)                                      1
(%i8) load(functs) $ lcm(a,b);
(%o9)                                 2909874419
```

3 Résolution d'Équation

Pour une fonction f de variable x, on résout une équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{C}$ par la commande

solve$(f(x) = 0, x)$;

Pour trois fonctions $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ de variables x,y,z et trois constantes $a,b,c \in \mathbb{C}$, on résout le système d'équations $\begin{cases} u(x,y,z) = a \\ v(x,y,z) = b \\ w(x,y,z) = c \end{cases}$ dans $\mathbb{C}$ par la commande

$$\text{solve}([u(x,y,z) = a,\ v(x,y,z) = b,\ w(x,y,z) = c],\ [x,y,z]);$$

Considérons les fonctions $f(x) = (x^2+3x+5)\log(x^2+3x+5)$, $u(x,y,z) = x+2y+3z$, $v(x,y,z) = 5x+3y+2z$, $w(x,y,z) = 3x+5y+7z$ et $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$ comme exemples.

```
(%i1) f(x):=(x^2+3*x+5)*log(x^2+3*x+5); u(x,y,z):=x+2*y+3*z;
      v(x,y,z):=5*x+3*y+2*z; w(x,y,z):=3*x+5*y+7*z;
                                       2                 2
(%o1)                       f(x) := (x  + 3 x + 5) log(x  + 3 x + 5)
(%o2)                           u(x, y, z) := x + 2 y + 3 z
(%o3)                           v(x, y, z) := 5 x + 3 y + 2 z
(%o4)                           w(x, y, z) := 3 x + 5 y + 7 z
(%i5) solve(f(x)=0,x);
             sqrt(7) %i + 3      sqrt(7) %i - 3        sqrt(11) %i + 3
(%o5) [x = - --------------, x = --------------, x = - ---------------,
                   2                   2                      2
           sqrt(11) %i - 3
       x = ---------------]
                  2
(%i6) solve([u(x,y,z)=2, v(x,y,z)=5, w(x,y,z)=7], [x,y,z]);
(%o6)                           [[x = - 8, y = 23, z = - 12]]
```

4 Étude de Fonction

On définit une fonction f de variable x comme suit

$$f(x)\ :=\ \textit{Expression};$$

Pour connaitre la valeur de f en $a \in \mathbb{R}$, on écrit

$$f(a);$$

Pour calculer la limite de f vers $a \in \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, on écrit

$$\text{limit}(f(x),\ x,\ a,\ \textit{Direction});$$

Notons que *Direction* $\in \{\text{plus}, \text{minus}\}$. La dérivée de f se calcule par

$$\text{diff}(f(x),\ x);$$

La primitive de f se calcule par

$$\text{integrate}(f(x),\ x);$$

L'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ se calcule par

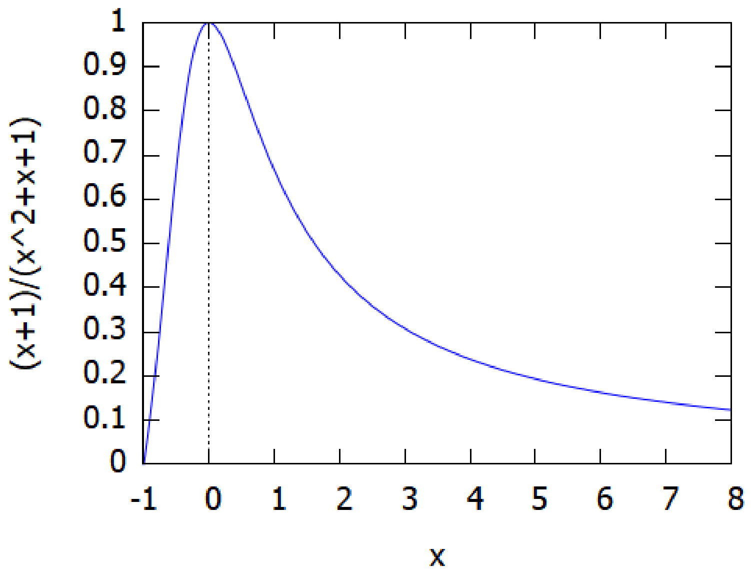
$$\text{integrate}(f(x),\ x,\ a,\ b);$$

Puis, pour visualiser la courbe de f sur l'intervalle $[a, b]$, on écrit

plot2d($f(x)$, [x, a, b]);

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ comme exemple.

```
(%i1) f(x) := (x+1)/(x^2+x+1);
                                           x + 1
(%o1)                           f(x) := ----------
                                           2
                                          x  + x + 1
(%i2) f(7);
                                            8
(%o2)                                      --
                                           57
(%i3) limit(f(x),x,inf,minus);
(%o3)                                       0
(%i4) diff(f(x),x);
                                  1        (x + 1) (2 x + 1)
(%o4)                          ---------- - -----------------
                                2                2         2
                               x  + x + 1     (x  + x + 1)
(%i5) integrate(f(x),x);
                                                     2 x + 1
                                  2            atan(-------)
                               log(x  + x + 1)       sqrt(3)
(%o5)                          --------------- + -------------
                                     2              sqrt(3)
(%i6) integrate(f(x),x,0,7);
                               atan(5 sqrt(3))   log(57)    %pi
(%o6)                          --------------- + -------- - ------
                                   sqrt(3)          2          3/2
                                                             2 3
(%i7) plot2d(f(x),[x,-1,8]);
```



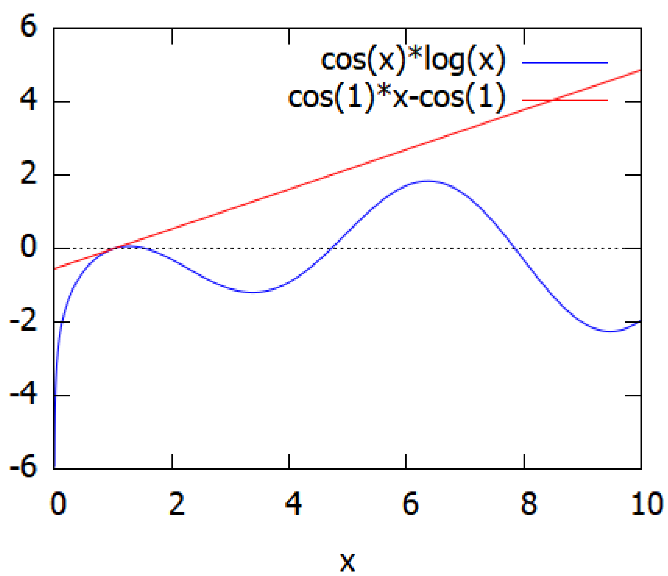
5 Représentation Graphique

On représente graphiquement les fonctions f et g sur l'intervalle $[a, b]$ par la commande

$$\text{plot2d}([f(x),\ g(x)],\ [x,\ a,\ b]);$$

Considérons les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x)\cos(x)$ et $df : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(1)x - \cos(1)$ sur l'intervalle $[0, 10]$ par exemple.

```
(%i1) f(x) := log(x)*cos(x); df(x) := cos(1)*x - cos(1);
(%o1)                                         f(x) := log(x) cos(x)
(%o2)                                      df(x) := cos(1) x - cos(1)
(%i3) plot2d([f(x), df(x)], [x, 0, 10]);
```

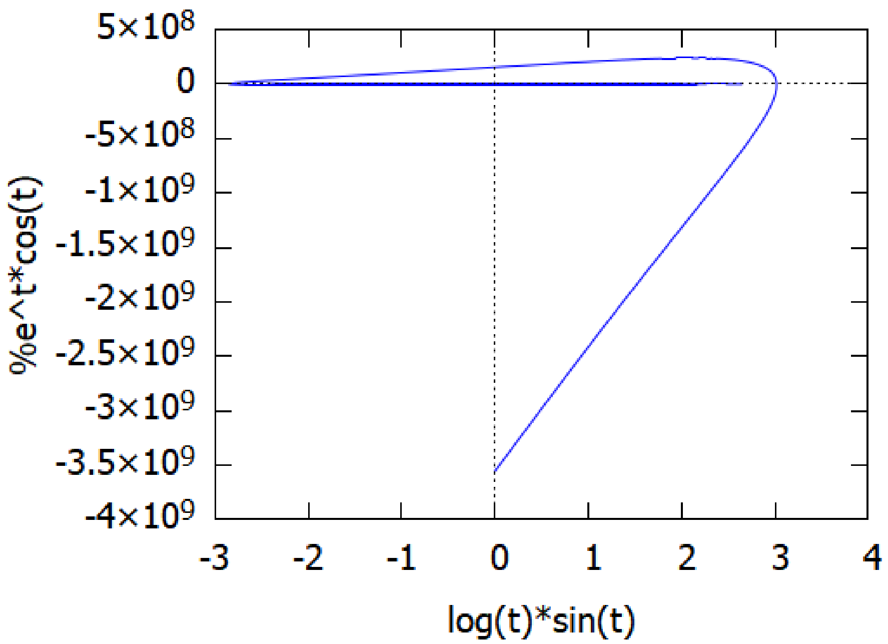


Finalement, on représente graphiquement la courbe paramétrée $\gamma = (f, g)$ sur l'intervalle $[a, b]$ par la commande

plot2d([parametric, $f(t)$, $g(t)$, [t, a, b]]);

Considérons la courbe paramétrée $(f, g) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(\log(t)\sin(t), \exp(t)\cos(t)\big)$ sur l'intervalle $[\pi, 7\pi]$ par exemple.

```
(%i1) f(t) := log(t)*sin(t); g(t) := exp(t)*cos(t);
(%o1)                                         f(t) := log(t) sin(t)
(%o2)                                         g(t) := exp(t) cos(t)
(%i3) plot2d([parametric, f(t), g(t), [t, %pi, 7*%pi]]);
```



References

[1] Maxima, a Computer Algebra System.

[2] *Maxima Manuel*, Version 5.44.0, 2020.

[3] Ministère de l'Enseignement Secondaire et de l'Éducation de Base, Programmes Scolaires - Classes Terminales A,C,D, Repoblikan'i Madagasikara, 1998.